Gebrochenrationale Funktionen – Übungsaufgaben vor Kurzarbeit

Diskutieren Sie die Funktionen:

a.) $f(x) = 1 + \frac{x-5}{x^2-1}$
b.) $f(x) = x - 4 + \frac{5}{x+2}$
c.) $f(x) = \frac{x^3+2x^2+x+2}{x+2}$

Lösung:

a.) An der Summenform des Funktionsterms erkennt man, dass der Graph eine waagerechte Asymptote bei $y = 1$ haben muss. Lässt man nämlich x gegen Unendlich laufen ($x \to \pm\infty$), geht der hintere Summand ($\frac{x-5}{x^2-1}$) gegen Null, da das Nennerpolynom einen höheren Grad besitzt, als das Zählerpolynom (Nenner geht schneller gegen Unendlich als der Zähler). Übrig bleibt: $f(x) \approx 1$ für $x \to \pm\infty$.

Alternativ bringt man die Funktion auf Bruchform und faktorisiert Zähler und Nenner.

$$f(x) = 1 + \frac{x-5}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{x-5}{x^2-1} = \frac{x^2+x-6}{x^2-1} = \frac{(x-2)\cdot(x+3)}{(x+1)\cdot(x-1)}$$

Die Linearfaktorzerlegung des Zählers erhält man durch die Nullstellen des Zählers (Mitternachtsformel):

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2} \Rightarrow x_1 = -3\,; x_2 = 2$$

Da Nennergrad und Zählergrad gleich sind, haben wir eine waagerechte Asymptote ungleich der x-Achse (siehe oben).

1.) Maximaler Definitionsbereich:
$D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{-1; +1\}$ (Hinweis: Nennernullstellen!)

2.) Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + (-x) - 6}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1} \neq f(x) \neq -f(x)$$

Der Graph von f ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung, noch achsensymmetrisch zur y-Achse. (Hinweis: alle x durch –x ersetzten; bei geraden Exponenten spielt das Minus keine Rolle und kann weggelassen werden: $(-x)^4 = x^4$; bei ungeraden Exponenten bleibt es übrig: $(-x)^5 = -x^5$)

3.) Schnittpunkte mit Koordinatenachsen:
Durch die Nullstellen erhält man die Schnittpunkte mit der x-Achse: $P_1(-3|0)$, $P_2(2|0)$.
Den Schnittpunkt mit der y-Achse erhält man durch $P_3\left(0\middle|f(0)\right) \Rightarrow P_3(0|7)$

3b) Asymptoten:
Die waagerechte Asymptote lässt sich an der Summenform ablesen: $y = 1$ (siehe oben)
alternativ erhält man sie durch Ausklammern von möglichst vielen x aus der Bruchform!
$f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-1} = \frac{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} \approx \frac{1}{1} = 1\ \ f\ddot{u}r\ x \to \pm\infty$ (alle Brüche mit x im Nenner gehen gegen Null!) $\Rightarrow$ $y = 1$ ist eine waagerechte Asymptote

Senkrechte Asymptoten sind $x = -1$ und $x = +1$. Beides sind Pole mit Vorzeichenwechsel, da die entsprechenden Linearfaktoren im Nenner nur einmal (ungerade) auftreten.

4.) Monotonie und Extrema

Die Nullstellen der Ableitung sind mögliche Extremstellen der Funktion

$$f'(x) = \frac{(2x+1)\cdot(x^2-1)-(x^2+x-6)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-x^2-2x-1-(2x^3+2x^2-12x)}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{2x^3-x^2-2x-1-2x^3-2x^2+12x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2+10x-1}{(x^2-1)^2}$$

Die Nullstellen der Ableitungsfunktion erhält man mithilfe der Mitternachtsformel angewendet auf $-x^2+10x-1=0 \Rightarrow x_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$

Monotonietabelle: ACHTUNG: Um einen besseren Überblick zu erhalten, sollte man am besten die zu untersuchenden Bereiche durch die Ableitungsnullstellen und die Polstellen einteilen!

Bereich	$x<-1$	$x=-1$	$-3<x<5-2\sqrt{6}$	$x=5-2\sqrt{6}$
$f'(x)$	$f'(-4)$=$-0{,}25<0$	uninteressant, da Pol	$f'(0)$=$-1<0$	0
Steigungsverh.	$s.m.f.$	Pol mit VZW	$s.m.f.$	Tiefpunkt

Bereich	$5-2\sqrt{6}<x<1$	$x=1$	$1<x<5+2\sqrt{6}$	$x=5+2\sqrt{6}$
$f'(x)$	$f'(0{,}5)\approx 6{,}7>0$	uninteressant, da Pol	$f'(3)$=>0	0
Steigungsverh.	$s.m.s.$	Pol mit VZW	$s.m.s.$	Hochpunkt

Bereich	$x>5+2\sqrt{6}$
$f'(x)$	$f'(10)$=$-0{,}001<0$
Steigungsverh.	$s.m.f.$

Koordinaten von Hoch- und Tiefpunkten müssen noch bestimmt werden!

5.) Periodizität spielt keine Rolle

6.) Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

Beide Polstellen sind Polstellen mit Vorzeichenwechsel!

Das Verhalten des Graphen an der Asymptote lässt sich auch leicht an der Summenform erkennen:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x-5}{x^2-1}\right) = 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{x-5}{x^2-1} = 1+0^+ = 1^+$$

Erklärung: Der Zähler des hinteren Bruchs geht für $x\to\infty$ gegen $+\infty$. Der Nenner gegen „$+\infty^2$". Der gesamte hintere Bruch geht somit gegen 0^+, da er stets positiv bleibt ($+\ durch + bleibt\ +$).

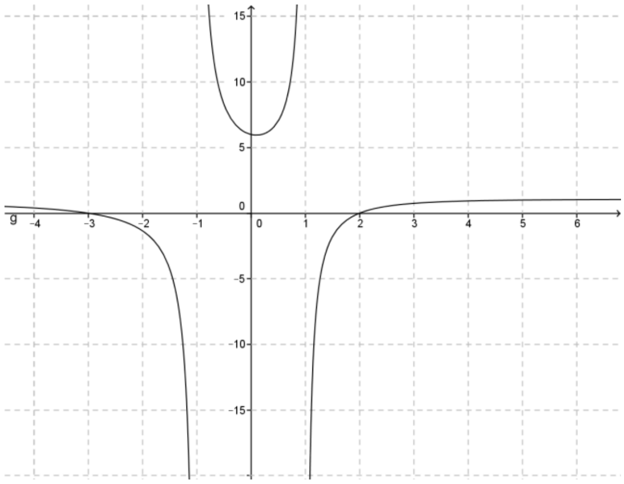
Der Graph nähert sich für $x\to+\infty$ von oben an die waagerechte Asymptote an.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x-5}{x^2-1}\right) = 1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{x-5}{x^2-1} = 1+0^- = 1^-$$

Erklärung: Der Zähler des hinteren Bruchs geht für $x\to\infty$ gegen $-\infty$. Der Nenner gegen „$+\infty^2$". Der gesamte hintere Bruch geht somit gegen 0^-, da er negativ ist bleibt ($-\ durch + bleibt\ -$).

Der Graph nähert sich für $x\to-\infty$ von unten an die waagerechte Asymptote an.

7.) Skizzieren! Hochpunkte und Asymptoten noch farbig einzeichnen!



b.) An der Summenform des Funktionsterms erkennt man, dass der Graph eine schiefe Asymptote mit $y = x - 4$ haben muss. Lässt man nämlich x gegen Unendlich laufen ($x \to \pm\infty$), geht der hintere Summand ($\frac{5}{x+2}$) gegen Null, da das Nennerpolynom einen höheren Grad besitzt, als das Zählerpolynom (Nenner geht schneller gegen Unendlich als der Zähler). Übrig bleibt: $f(x) \approx x - 4$ für $x \to \pm\infty$.

Alternativ bringt man die Funktion auf Bruchform und faktorisiert Zähler und Nenner.

$$f(x) = x - 4 + \frac{5}{x+2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{x+2} = \frac{(x+1) \cdot (x-3)}{x+2}$$

Die Linearfaktorzerlegung des Zählers erhält man durch die Nullstellen des Zählers (Mitternachtsformel)!

Da der Nennergrad genau um eins größer ist als der Zählergrad, haben wir eine schiefe Asymptote.

1.) Maximaler Definitionsbereich:
$D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ (Hinweis: Nennernullstellen!)

2.) Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2 \cdot (-x) - 3}{(-x) + 2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{-x + 2} \neq f(x) \neq -f(x)$$

Der Graph von f ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung, noch achsensymmetrisch zur y-Achse.

3.) Schnittpunkte mit Koordinatenachsen:
Durch die Nullstellen erhält man die Schnittpunkte mit der x-Achse: $P_1(-1|0)$, $P_2(3|0)$.
Den Schnittpunkt mit der y-Achse erhält man durch $P_3\left(0\middle|f(0)\right) \Rightarrow P_3(0|-1{,}5)$

3b) Asymptoten:
Die schiefe Asymptote lässt sich an der Summenform ablesen: $y = x - 4$ (siehe oben)
ENTGEGEN VORHERIGER BEHAUPTUNGEN LÄSST SICH DIESE NUR IN AUSNAHMEFÄLLEN DURCH AUSKLAMMERN BESTIMMEN!! Also: Ausklammern nur bei waagerechter, NICHT bei schiefer Asymptote. Schiefe Asymptoten lassen sich immer an der Summenform ablesen! Bei schiefen Asymptoten ist immer die Summenform angegeben!!

Die senkrechte Asymptoten ist bei $x = -2$. Es handelt sich um eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel, da der entsprechende Linearfaktor im Nenner nur einmal (ungerade) auftritt.

4.) Monotonie und Extrema

Die Nullstellen der Ableitung sind mögliche Extremstellen der Funktion

$$f'(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x+2)-(x^2-2x-3)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+2x-2-x^2+2x+3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$$

Die Nullstellen der Ableitungsfunktion erhält man mithilfe der Mitternachtsformel angewendet auf $x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}$

Monotonietabelle: ACHTUNG: Um einen besseren Überblick zu erhalten, sollte man am besten die zu untersuchenden Bereiche durch die Ableitungsnullstellen und die Polstellen einteilen! Hier ist es zwar nicht zwingend notwendig, aber schaden tut es auch nicht…

Bereich	$x < -2-\sqrt{5}$	$x = -2-\sqrt{5}$	$-2-\sqrt{5} < x < -2$	$x = -2$
$f'(x)$	> 0	$= 0$	< 0	Uninteressant, da Pol
Steigungsverh.	$s.m.s.$	Hochpunkt	$s.m.f.$	Pol mit VZW

Bereich	$-2 < x < -2+\sqrt(5)$	$x = -2+\sqrt{5}$	$x > -2+\sqrt{5}$
$f'(x)$	< 0	$= 0$	> 0
Steigungsverh.	$s.m.f.$	Tiefpunkt	$s.m.s.$

Tiefpunkt: $TP\left(-2+\sqrt{5}\middle|-6+2\sqrt{(5)}\right)$ Hochpunkt: $HP\left(-2-\sqrt{5}\middle|-6-2\sqrt{(5)}\right)$

5.) Periodizität spielt keine Rolle

6.) Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

Die Polstelle hat einen Vorzeichenwechsel!

Das Verhalten des Graphen an der Asymptote lässt sich auch leicht an der Summenform erkennen:

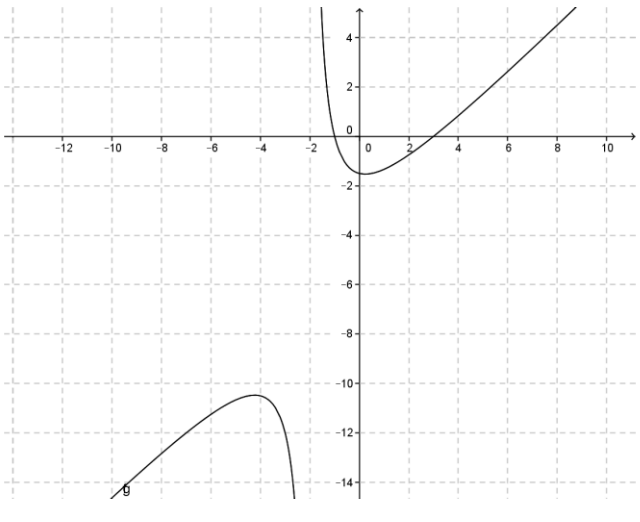
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-4+\frac{5}{x+2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-4) + \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x+2} \approx x-4+0^+ = (x-4)^+$ für $x \to +\infty$

Erklärung: Der Zähler des hinteren Bruchs geht für $x \to +\infty$ gegen 5. Der Nenner geht gegen $+\infty$. Zu $x - 4$ wird steht eine kleine, aber positive Zahl addiert. Der Graph nähert sich von oben an die Asymptote an.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-4+\frac{5}{x+2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x-4) + \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x+2} \approx x-4+0^- = (x-4)^-$ für $x \to -\infty$

Erklärung: Der Zähler des hinteren Bruchs geht für $x \to -\infty$ gegen 5. Der Nenner geht gegen $-\infty$. Zu dem Wert von $x - 4$ wird eine kleiner, aber negative Zahl addiert. Der Graph nähert sich von unten an die Asymptote an.

7.) Skizzieren! Asymptoten und Hoch- und Tiefpunkte einzeichnen!



c.) Der Graph von f wird für $x \to \pm\infty$ gegen $\pm\infty$ gehen, da der Zählergrad um mehr als 1 größer ist als der Nennergrad.

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x + 2} = \frac{(x+2) \cdot (x^2+1)}{x+2} = x^2 + 1 \; mit \; x \neq -2 \text{ !!!!}$$

Die (Linear-)faktorzerlegung des Zählers erhält man durch die Nullstellen des Zählers (Polynomdivision)!

$x_1 = -2$ als Zählernullstelle erraten.
Probe: $f(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + (-2) + 2 = -8 + 8 - 2 + 2 = 0$

Polynomdivision: $(x^3 + 2x^2 + x + 2): (x + 2) = x^2 + 1$
Da die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine weiteren Lösungen besitzt, gibt es keine weiteren Zählernullstellen! Der Faktor $(x^2 + 1)$ wird unzerlegt in den Zähler geschrieben.

1.) Maximaler Definitionsbereich:
$D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ (Hinweis: Nennernullstellen!)

2.) Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2 + (-x) + 2}{(-x) + 2} = \frac{-x^3 + 2x - x - 3}{-x + 2} \neq f(x) \neq -f(x)$$

Der Graph von f ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung, noch achsensymmetrisch zur y-Achse. Auch wenn die „gekürzte Bruchform" $f(x) = x^2 + 1$ eine Achsensymmetrie nahelegt (nach oben verschobene Normalparabel) ist der Graph wegen der nicht mittig liegenden Definitionslücke ($x \neq -2$) nicht symmetrisch.

3.) Schnittpunkte mit Koordinatenachsen:
Den Schnittpunkt mit der y-Achse erhält man durch $P_1\big(0\big|f(0)\big) \Rightarrow P_3(0|1)$
Der Graph besitzt keine Nullstellen. Die Zählernullstelle ist identisch mit einer Nennernullstelle. Bei $x = -2$ liegt eine HEBBARE DEFINITIONSLÜCKE vor.

3b) Asymptoten:
Waagerechte und schiefe Asymptoten liegen in diesem Fall nicht vor.
Eine senkrechte Asymptote gibt es auch nicht, da bei einer hebbaren Definitionslücke nach dem Kürzen der entsprechende Linearfaktor ganz weggefallen ist. Es bleibt wirklich nur eine „Lücke", keine Unendlichkeitsstelle.

4.) Monotonie und Extrema
Die Nullstellen der Ableitung sind mögliche Extremstellen der Funktion
$f'(x) = \frac{(3x^2+4x+1)\cdot(x+2)-(x^3+2x^2+x+2)\cdot(1)}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x+2)-(x+2)\cdot(x^2+1)}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)\cdot(x+3)-(x^2+1)}{(x+2)}$ (ein Linearfaktor wurde herausgekürzt).

$$\ldots = \frac{(3x^2 + 4x + 1) - (x^2 + 1)}{x + 2} = \frac{2x^2 + 4x}{x + 2} = \frac{2x(x+2)}{x+2} = 2x \; mit \; x \neq -2\text{!!!}$$

Auf dieses Ergebnis kommt man natürlich sofort, wenn man die „gekürzte Bruchform" ableitet und von Anfang an festhält, dass $x \neq -2$ sein muss! $f'(x) = (x^2 + 1)' = 2x \; mit \; x \neq -2$!!!

Die Nullstellen der Ableitungsfunktion erhält man sofort $\Rightarrow x = 0$

<u>Monotonietabelle</u>: ACHTUNG: Um einen besseren Überblick zu erhalten, sollte man am besten die zu untersuchenden Bereiche durch die Ableitungsnullstellen und die Polstellen einteilen! Hier ist es zwar nicht zwingend notwendig, aber schaden tut es auch nicht…

Bereich	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$
$f'(x)$	< 0	uninteressant, da Lücke	< 0	$= 0$
Steigungsverh.	$s.m.f.$	hebbare Lücke	$s.m.f.$	Tiefpunkt

Bereich	$x > 0$
$f'(x)$	> 0
Steigungsverh.	$s.m.s.$

Tiefpunkt: $TP(0|1)$

5.) Periodizität spielt keine Rolle

6.) Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

Keine Polstellen! An der hebbaren Lücke ist wirklich nur eine Lücke. Wenn man sich von beiden Seiten unendlich nah an die Definitionslücke annähert, erhält man 5, d.h. $\lim_{x\to -2} f(x) = 5$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x+2} = \left(\frac{+\infty^3}{+\infty} = +\infty^2\right) = +\infty$ (Gedankengang habe ich in Klammer geschrieben; alternativ kann man seine Gedanken in Anführungszeichen klein daneben schreiben)

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x+2} = \left(\frac{(-\infty)^3}{-\infty} = \frac{-\infty^3}{-\infty} = +\infty^2\right) = +\infty$$

7.) Skizzieren!