Spatprodukt – Übungsaufgaben – Lösungen

Aufgabe 1:

a.) $V = 72$ b.) $V = 72$

c.) $V_a = V_b$ Von den Vektoren, die durch die Punkte vorgegeben sind, wird der gleiche Spat aufgespannt. Die Grundflächen $ABCD$ der Spate haben die gleiche Seitenlänge $\overline{AB}$ und gleich lange Höhen.

d.) $V = 80$

e.) $V = 57$

f.) $V = 0$

Aufgabe 2:

Volumen der dreiseitigen Pyramide

a.) $V_{ABCS} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \circ \overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot$
$(3 + 4 + 5) = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2$

b.) $V_{ABCS} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \circ \overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot$
$(-6 + 3 + 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c.) $V_{ABCS} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \circ \overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot$
$\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{0}{6} = 0$

d.) $V_{ABCS} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \circ \overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} s-1 \\ s+2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ -28 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} s-1 \\ s+2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot$
$|(14 \cdot (s-1) + 14 \cdot (s+2) - 56)| = \frac{1}{6} \cdot |(14s - 14 + 14s + 28 - 56)| = \left|\frac{1}{6} \cdot (28s - 42)\right| =$
$\left|\frac{14}{3}s - 7\right| \Rightarrow \left|\frac{14}{3}s - 7\right| \overset{!}{=} 7 \Rightarrow \frac{14}{3}s - 7 = +7$ oder $\frac{14}{3}s - 7 = -7$
$\Rightarrow s_1 = 3$ oder $s_2 = 0$

Aufgabe 3:

Identisch zu Aufgabe 2

Aufgabe 4:

a.) Die Gerade $[AD]$ verläuft in der x_1-x_3-Ebene.

b.) $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 5\sqrt{2}$ Alle Seiten sind gleich lang. Die dreiseitiger Pyramide ist ein (reguläres) Tetraeder.

c.) $V = \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \circ \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\begin{pmatrix}-4\\5\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\5\\4\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}-7\\0\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix}35\\25\\-5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-7\\0\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot$

$|-245 + 0 - 5| = \frac{1}{6} \cdot |-250| = \frac{1}{6} \cdot 250 = \frac{125}{3}(VE) \approx 41{,}67(VE)$

$O = 4 \cdot A_{ABC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix}-4\\5\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\5\\4\end{pmatrix}\right| = 2 \cdot \left|\begin{pmatrix}35\\25\\-5\end{pmatrix}\right| =$

$2 \cdot \sqrt{35^2 + 25^2 + (-5)^2} = 2 \cdot \sqrt{1875} = 50\sqrt{3}\ (FE) \approx 86{,}60\ (FE)$

d.) kleine Pyramide: $M_1M_2M_3A$ große Pyramide: $BCDA$

Allgemein gilt (Grundwissen: 8. Klasse):
Ändert man Länge aller Kanten eines Körpers/einer Figur um den Faktor k, so ändert sich der Flächeninhalt einer Figur um den Faktor k^2, das Volumen einer Körpers ändert sich um den Faktor k^3.

Hier hat die kleine Pyramide genau halb so lange Kanten, wie die große Pyramide.

$\Rightarrow$ Die Oberfläche ist um den Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ kleiner. Das Volumen ist um den Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ kleiner.

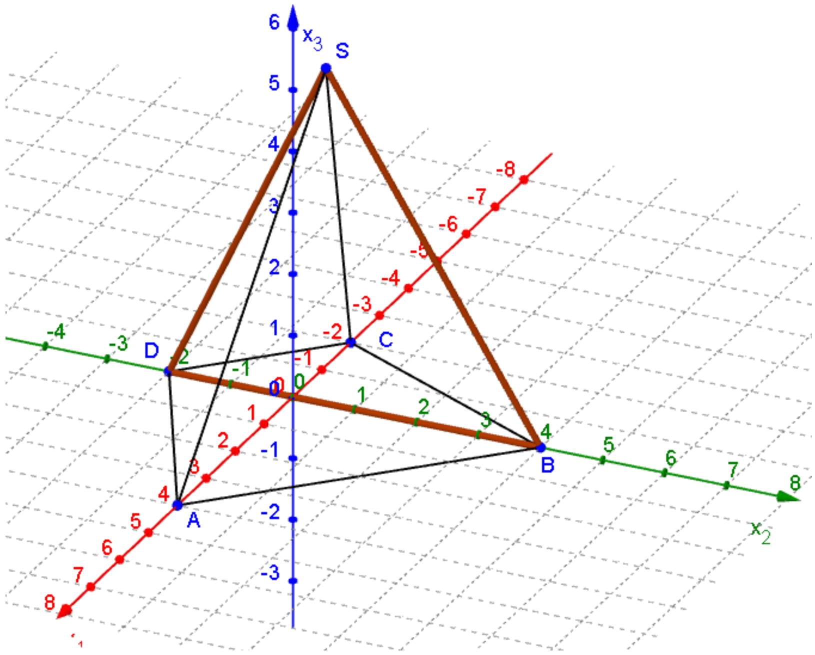
Alternativ kann man natürlich auch die Mittelpunkte mit der Formel $\overrightarrow{M_1} = \overrightarrow{M_{AB}} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$ berechnen und so das Volumen der kleinen Pyramide für diesen Spezialfall berechnen und anschließend mit den Ergebnissen für die große Pyramide vergleichen.

e.) $V_{Stumpf} = V_{groß} - V_{klein} = V_{groß} - \frac{1}{8} \cdot V_{groß} = \frac{7}{8} \cdot V_{groß} = \frac{7}{8} \cdot \frac{125}{3}(VE) = \frac{875}{24}(VE) \approx 36{,}46\ (VE)$

$O_{Stumf} = O_{groß} - 3 \cdot A_{AM_1M_2} + A_{M_1M_2M_3} = O_{groß} - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 A_{ABC} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot A_{ABC} = O_{groß} - \frac{1}{2} \cdot A_{ABC} = O_{groß} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} O_{groß}\right) = O_{groß} - \frac{1}{8} O_{groß} = \frac{7}{8} \cdot O_{groß} = \frac{7}{8} \cdot 50\sqrt{3} \approx 75{,}78\ (FE)$

Aufgabe 5:

a.) Zeichnung



b.) Erinnerung: Mit dem Spatprodukt lässt sich das Volumen einen Parallelepipeds bzw. einer <u>dreiseitigen</u> Pyramide berechnen.

$$V_{ABCD\,S} = V_{ABD\,S} + V_{BCD\,S}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD\,S} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) \circ \overrightarrow{AS}\right| + \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD}\right) \circ \overrightarrow{CS}\right| =$$

$$\frac{1}{6} \cdot \left|\left(\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\-2\\0\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}-3\\1\\6\end{pmatrix}\right| + \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}\right| =$$

$$\frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\24\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-3\\1\\6\end{pmatrix}\right| + \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\-12\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot (144) + \frac{1}{6} \cdot |-72| = 24 + 12 = 36\ (VE)$$

c.) Achtung: Die Grundfläche ist kein Parallelogramm, sondern ein allgemeines Viereck.

$$V_{ABCD\,S} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot A_{ABCD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (A_{ABD} + A_{BCD}) \cdot h =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| + \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD}\right|\right) \cdot h$$

Da die Grundfläche in der x_1-x_2-Ebene liegt, die die x_3-Koordinate der Spitze S gleichzeitig auch die Höhe der Pyramide: $h = 6$

$$\Rightarrow V_{ABCD\,S} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\-2\\0\end{pmatrix}\right| + \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\right|\right) \cdot 6 =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\24\end{pmatrix}\right| + \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\-12\end{pmatrix}\right|\right) \cdot 6 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 24 + \frac{1}{2} \cdot 12\right) \cdot 6 = \frac{1}{3} \cdot (12 + 6) \cdot 6 = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6$$

$$= 36\ (VE)$$

Dritte Möglichkeit ohne Vektoren:

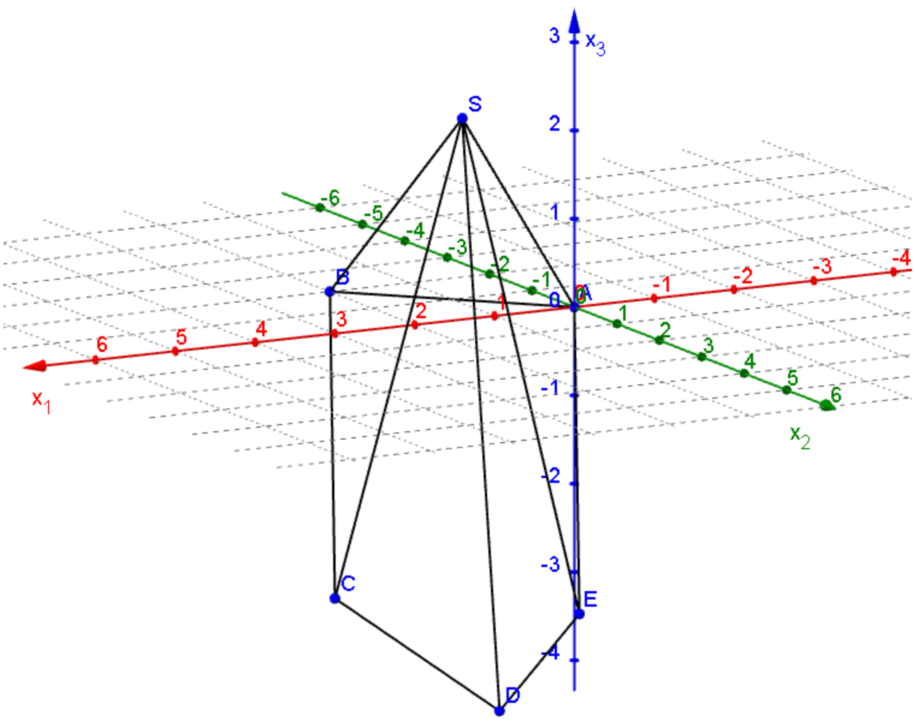
Da die Grundfläche der Pyramide in der x_1-x_2-Ebene liegt, gilt auch:

$$G = A_{ABCD} = A_{ABD} + A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{OC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 12 + 6$$

$$= 18\ (FE)$$

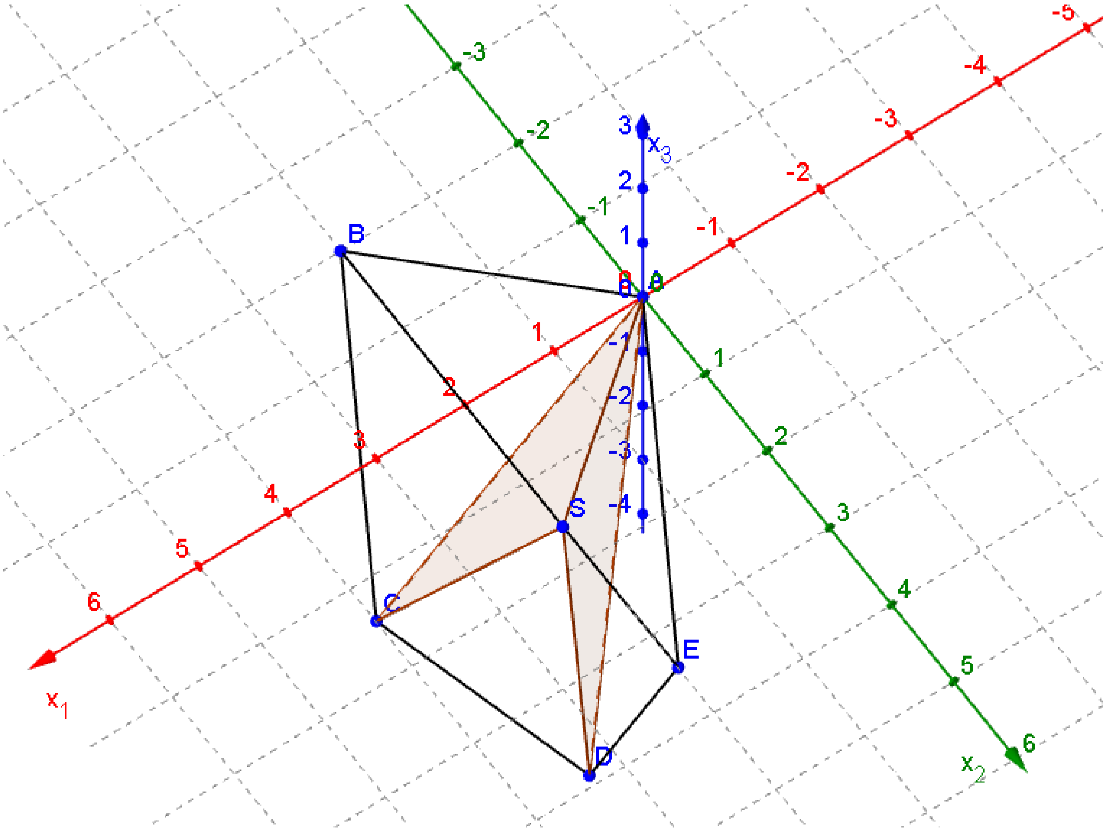
$$V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36\ (VE)$$

d.) Zeichnung:



Zerlegung der Pyramide in Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche.

z.B hier: Blick von oben auf die Pyramide:



$$V_{ABCDE\ S} = V_{ABC\ S} + V_{ACD\ D} + V_{ADE\ S} = 9 + 9 + 3 = 21$$