Koordinatengeometrie in 3D

Nr. 1 Zwei Vektoren sind parallel, wenn $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ $(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$

a.) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$ parallel

b.) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ parallele Gegenvektoren

c.) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$ parallel

d.) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ parallel

e.)
x_1: $2 = \frac{1}{2} \cdot 4$
x_2: $-3 = \frac{1}{2} \cdot (-6) \Rightarrow \vec{a} \neq \lambda \cdot \vec{b}$
x_3: $4 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 8 \Rightarrow$ nicht parallel

f.) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4{,}5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$-2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 3$
$3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-4{,}5)$
$-4 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 6$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4{,}5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Nr. 2 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben $\Rightarrow$ alle Vektoren müssen parallel zu $\vec{a}$ sein!

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \vec{a}$ (3, da z-Koord: $3 = 3 \cdot 1$)

$\Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \vec{a}$$, damit x_2-Koord. passt

$$\Rightarrow c_1 = (-1) \cdot 3 = -3 \qquad c_3 = (-1) \cdot 1 = -1$$

$$\Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$ Gegenvektor!

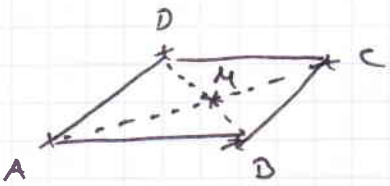
$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (Nullvektor ist parallel zu allen/keinem Vektor!)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ w_3 \end{pmatrix}$$ Kann nie parallel zu $\vec{a}$ werden!

$$3 = \frac{1}{2} \cdot 6$$
$$-2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4$$
nicht eindeutig!

Nr. 3 a.)



$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{AD} = \vec{A} + \vec{BC} = \vec{A} + (\vec{C} - \vec{B}) \qquad (\vec{AD} = \vec{BC})$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - 2 - 0 \\ 1 + 4 - 4 \\ 0 + 3 - 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

$$\vec{M} = \vec{M}_{AC} = \vec{M}_{BD} = \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{C}$$

(Diagonalen halbieren sich wichtig!)

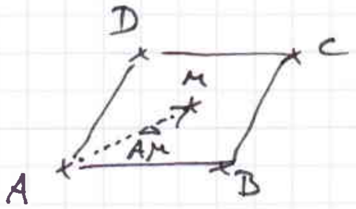
$$= \frac{1}{2}\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B} = \ldots$$ Sehr viele Möglichkeiten!

$$M = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 0,5 + 2 \\ 0 + 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 0 \\ 0,5 + 2 \\ 1 + 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

Nr. 3b

geg.: $\vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{M} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$



$$\vec{D} = \vec{A} + 2 \cdot \overrightarrow{AM}$$
$$= \vec{A} + 2 \cdot (\vec{M} - \vec{A})$$

$$\Rightarrow \vec{C} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

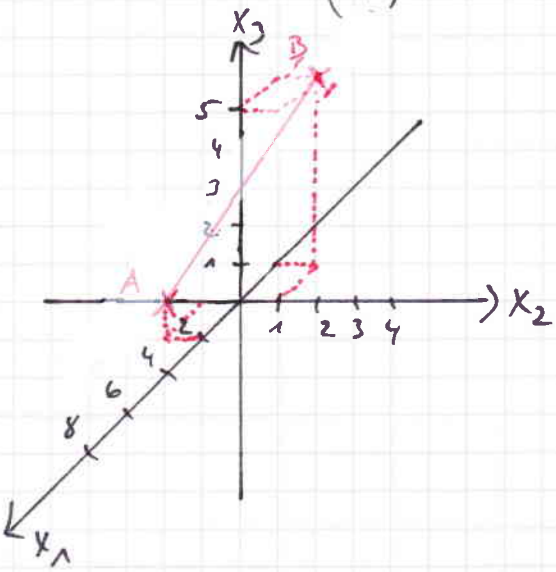
$$\Rightarrow \vec{C} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}}$$

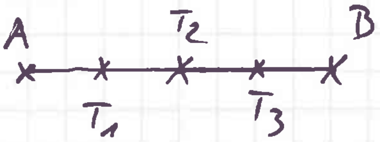
$$\vec{D} = \vec{B} + 2 \cdot \overrightarrow{BM} \overset{\text{(oder)}}{=} \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \vec{A} + (\vec{C} - \vec{B})$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}}$$

Nr. 4

geg.: $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$





$$T_1 = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{A} = \begin{pmatrix} +1 \\ -0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \vec{A} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \vec{A} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$