S. 137/15a)

geg.: $f(x) = x \cdot (x-2)^3 \quad D_f = \mathbb{R}$

ges.: Lage und Art der Extrema

$$f'(x) = (x \cdot (x-2)^3)' \overset{PR}{=} (x)' \cdot (x-2)^3 + x \cdot ((x-2)^3)' =$$
$$= (x-2)^3 + 3x \cdot (x-2)^2$$

Nullstellen der Ableitung:

$$f'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^3 + 3x \cdot (x-2)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 \cdot (x-2+3x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 \cdot (4x-2) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 2 \qquad x_2 = 0{,}5$$

Vorzeichentabelle:

Bereich	$x < 0{,}5$	$x = 0{,}5$	$0{,}5 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$f'(x)$	$-$ <0	$=0$	$+$ $0<$	$=0$	$0<$ $+$
Steigungs-verhalten	↘	TP	↗	SP	↗

Extrempunkte:

$\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $TP(0{,}5 / f(0{,}5)) \Rightarrow TP(0{,}5 / -\frac{27}{16}) \Rightarrow \underline{TP(0{,}5 / -1{,}69)}$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $SP(2 / f(2)) \Rightarrow \underline{SP(2/0)}$

S. 1[illegible]7//8 b)

$f(x) = a x^n + x + b$ $\qquad$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$b \in \mathbb{R}$
ungerades $n \in \mathbb{N}$

$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1} + 1$

$n-1$ ist immer eine gerade Zahl

$\Rightarrow$ Egal, ob man ein positives oder ein negatives x einsetzt, für x^{n-1} erhält man immer eine positive Zahl.

$\Rightarrow$ Der Graph von $f(x)$ steigt streng monoton, wenn a positiv ist, oder fällt streng monoton, wenn a negativ ist.

S. 137//16 a)

$f(x) = (kx^3+1)^2$

$f'(x) = 2 \cdot (kx^3+1) \cdot 3kx^2 = 6k^2x^5 + 6kx^2$

$0 = 6k^2 \cdot 1^5 + 6k \cdot 1^2$

$0 = 6k\,(k+1)$

$\Rightarrow$ $k_1 = 0$ $\quad \Rightarrow f_1(x) = 1$ $\quad \Rightarrow$ kein Extrempunkt bei $x = 1$
(Parallele zur x-Achse)

$k_2 = -1$ $\quad \Rightarrow f_2(x) = (-x^3+1)^2$ $\quad \Rightarrow f_2'(x) = 6x^5 - 6x^2$

$0 = 6x^5 - 6x^2$

$0 = 6x^2(x^3-1)$ $\qquad \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 1$

x	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f_2'(x)$	$f_2'(0{,}5) = -\frac{21}{16}$ < 0	0	$f_2'(2) = 158$ > 0
Monotonie	↘	TP	↗

$\Rightarrow$ Der Graph von f hat für $k = -1$ an der Stelle $a = 1$ einen Tiefpunkt.

Hausaufgabe

a) $f(x) = \frac{(x+1)}{(x-2)^3}$ Zählergrad < Nennergrad

Nennergrad: 3

Zählergrad: 1

Definitionslücken: bei $x = 2$ (dreifach)

Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Polstellen: bei $x = 2$ (mit VZW)

Nullstellen: bei $x = -1$ (mit VZW)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{(x+1)}^{+\infty}}{\underbrace{(x-2)^3}_{(+\infty)^3}} = 0^+$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{(x+1)}^{-\infty}}{\underbrace{(x-2)^3}_{(-\infty)^3}} = 0^+$$