Nr. 5

a.) $f(x) = \frac{1}{2} e^{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} e^{x}$

$F(x) = \frac{1}{2} e^{x}$, da $F'(x) = f(x)$

b.) $g(x) = e^{3x} \Rightarrow g'(x) = e^{3x} \cdot 3$

$G(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{3x}$

c.) $h(x) = 3 \cdot e^{2x-1} \Rightarrow h'(x) = 3 \cdot e^{2x-1} \cdot 2\cancel{x}$

$= 6\cancel{x} \cdot e^{2x-1}$

$H(x) = \frac{3}{2} e^{2x-1}$, da $H'(x) = \frac{3}{2} \cdot e^{2x-1} \cdot 2 = h(x)$

d.) $j(x) = \frac{3}{4x+7} + \frac{2}{e^{x}} \Rightarrow j'(x) = \left(3 \cdot (4x+7)^{-1}\right)' + \left(2 \cdot e^{-x}\right)'$

$= -3 \cdot (4x+7)^{-2} \cdot 4 + 2 \cdot e^{-x} \cdot (-1)$

$= -\frac{12}{(4x+7)^2} - \frac{2}{e^{x}}$

$J(x) = \frac{3}{4} \ln(4x+7) - 2e^{-x}$

$J'(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4x+7} \cdot 4 - 2 \cdot e^{-x} \cdot (-1)$

$= \frac{3}{4x+7} + 2 \cdot e^{-x} = \frac{3}{4x+7} + \frac{2}{e^{x}}$

Nr. 6 $f(x) = x^3 + x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$!

$\Rightarrow G_f$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend!

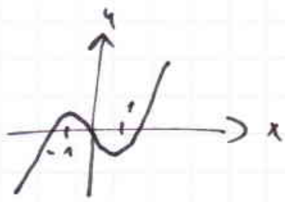
$g(x) = x^3 - x \Rightarrow g'(x) = x^2 - 1$

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Monotonietabelle:

Bereich	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	> 0	$= 0$	< 0	$= 0$	> 0
Monotonie	↗	HP	↘	TP	↗

Skizze:



Nr. 7 a.) $f(x) = e^{x} + e^{-2x}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{x} + e^{-2x} \cdot (-2)$

$= e^{x} - 2e^{-2x}$ $\quad$ (e^x sollte immer ausgeklammert werden! hier schwer!)

$= e^{x} - \frac{2}{e^{2x}}$

$= \frac{e^{3x}}{e^{2x}} - \frac{2}{e^{2x}} = \frac{e^{3x} - 2}{e^{2x}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{3x} - 2 = 0 \Rightarrow e^{3x} = 2 \quad | \ln(..)$

$3x = \ln(2) \Rightarrow x = \frac{1}{3} \cdot \ln(2)$

(NICHT AUSRECHNEN!)

Monotonietabelle:

	$x < \frac{1}{3}\ln(2)$	$x = \frac{1}{3}\ln(2)$	$x > \frac{1}{3}\ln(2)$
$f'(x)$	<0	$=0$	>0
Monotonie	$\searrow$	TP	$\nearrow$

$TP\left(\frac{\ln(2)}{3} \,\middle|\, f\left(\frac{\ln(2)}{3}\right)\right) \Rightarrow TP\left(\frac{\ln(2)}{3} \,\middle|\, 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}\right)$

$f\left(\frac{\ln(2)}{3}\right) = e^{\frac{\ln(2)}{3}} + e^{-2 \cdot \frac{\ln(2)}{3}}$

$= \left(e^{\ln(2)}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(e^{\ln(2)}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$= 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$

$\lim\limits_{x \to \infty} (\underbrace{e^{x}}_{+\infty} + \underbrace{e^{-2x}}_{0}) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (\underbrace{e^{x}}_{0} + \underbrace{e^{-2x}}_{+\infty}) = +\infty$

Nr. 7 b.)

$f(x) = (e^{-x} - 1)^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot (e^{-x} - 1) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$= -2 \cdot e^{-x} \cdot (e^{-x} - 1)$

$f'(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \underbrace{-2 \cdot e^{-x}}_{\text{wird nie } 0} \cdot (e^{-x} - 1) = 0$

$\Rightarrow e^{-x} - 1 = 0$

$\Rightarrow e^{-x} = 1 \qquad | \ln(\ldots)$

$-x = \ln(1)$

$-x = 0$

$\underline{\underline{x = 0}}$

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	< 0	$= 0$	> 0
Monotonie	$\searrow$	TP	$\nearrow$

$TP(0 | f(0)) \Rightarrow TP(0 | 0)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{(\underbrace{e^{\overbrace{-x}^{+\infty}}}_{+\infty} - 1)^2}_{+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{(\underbrace{\underbrace{e^{-x}}_{0^+} - 1}_{-1})^2}_{(-1)^2} = 1$

c.) $f(x) = x - e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = 1 - e^{-2x}\cdot(-2) = 1+2e^{2x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{1+\underbrace{2e^{2x}}_{>0}}_{>1} = 0$ $\Rightarrow$ keine Lösung $\Rightarrow$ kein Extrema!

da $f'(x)>0$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ G_f ist überall streng monoton steigend!

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{x}_{-\infty} - \underbrace{e^{\overbrace{-2x}^{+\infty}}}_{+\infty}\right) = -\infty$$

(e-Fkt geht schneller gegen „$+\infty$" als „x")

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{x}_{\infty} - \underbrace{e^{\overbrace{-2x}^{-\infty}}}_{0}\right) = +\infty$$

Nr. 7d) $f(x) = 2\cdot\left(x - \frac{1}{2}\ln(x)\right) \Rightarrow f'(x) = 2\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)$

$\boxed{D_{max} = \mathbb{R}^+ \ !!!}$

$= 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$

$f'(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 2x-1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$

Bereich	$0 < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$f'(x)$	<0	$=0$	>0
Monotonie	$\searrow$	TP	$\nearrow$

$TP\left(\frac{1}{2} \,\middle|\, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \Rightarrow TP\left(\frac{1}{2} \,\middle|\, 1+\ln(2)\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 1+\ln(2)$

<u>NR:</u> $-\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\left[\ln(1) - \ln(2)\right]$
$= -\left[0 - \ln(2)\right] = +\ln(2)$!

! $\Rightarrow \lim_{x\to 0} 2\cdot\left(\underbrace{\overset{0}{x} - \frac{1}{2}\underbrace{\overset{0}{\ln(x)}}_{-\infty}}_{+\infty}\right) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} 2\cdot\left(\overset{\infty}{x} - \frac{1}{2}\underbrace{\overset{\infty}{\ln(x)}}_{+\infty}\right) = +\infty \quad „\infty" - „\infty"$$

ln geht langsamer gegen ∞, als Potenzfunktion!